2/3/2017

Μάθημα 2°

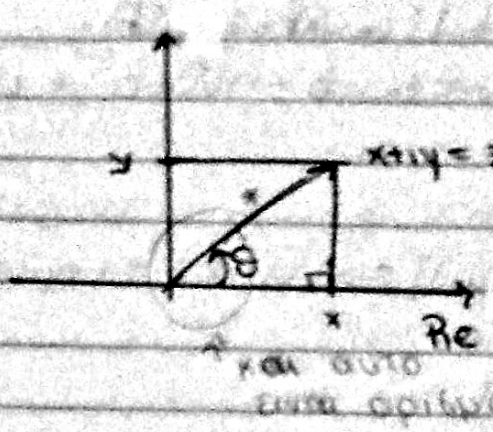
$\mathbb{C}$ $\exists i$ $i^2+1=0$

$i^2=-1$

$z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$

$x=Re(z)$

$y=Im(z)$



{κάθε σημείο αντιστοιχίζεται σε μοναδικό μιγαδικό και αντίστροφα}

* $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

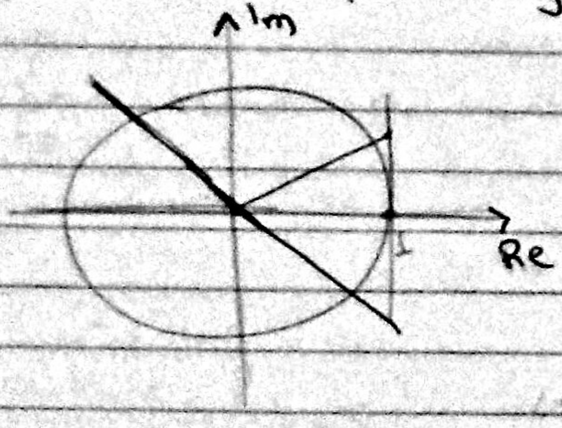
$|z-w|$

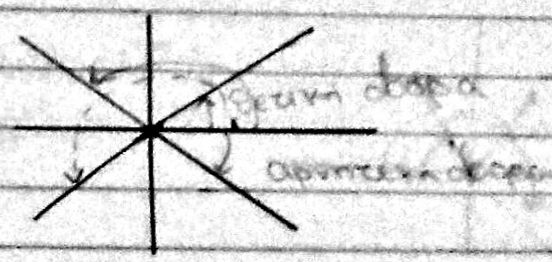
θ {όρισμα του μιγαδικού αριθμού z}

$\theta=\underline{arg}(z)$

Την συντομότερη γωνία που σχηματίζεται την ονομάζουμε

Βασικό όρισμα: $Arg(z)$

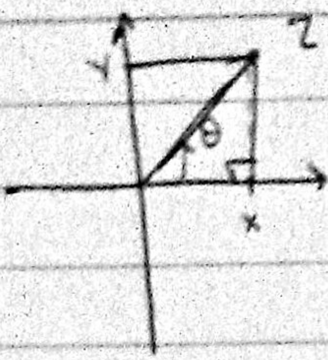




$z=x+iy$

$z\neq 0$ ⊛

$$Arg(z)=\begin{cases} \text{τοξεφ}\,\frac{y}{x} & x,y>0 \\ \text{τοξεφ}\,y/x & x>0,\ y<0 \\ \pi+\text{τοξεφ}\,y/x & x<0,\ y>0 \\ -\pi+\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x} & x<0,\ y<0 \\ \pi/2 & x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x=0,\ y<0 \end{cases}$$



$x = |z|\,\text{συν}\theta$

$y = |z|\,\text{ημ}\theta$

$z = x + iy = |z|(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$

$z = |z|(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

$w = |w|(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$

$z\cdot w = |z|\,|w|\cdot(\text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi - \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi + i(\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi + \text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi))$

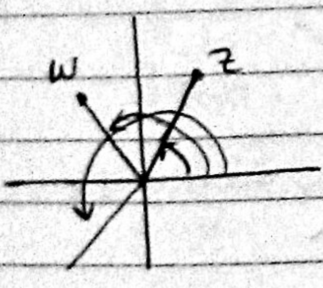
Χρησιμοποιώ τις ταυτότητες
που αναφέρονται στο γινόμενο τριγώνων αριθμών

$z\cdot w = |z|\,|w|[\text{συν}(\theta+\varphi) + i\,\text{ημ}(\varphi+\theta)]$

$|z\cdot w| = |z|\,|w|$

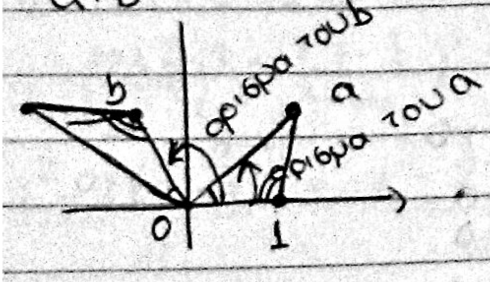
$\theta + \varphi = \arg(z w) = \arg(z) + \arg(w) \quad (+2\kappa\pi)$

$\text{Arg}(z\cdot w) \neq \text{Arg}\,z + \text{Arg}(w)$



{δεν μπορεί να είναι
το βασικό όρισμα μεγαλύτερο του π}

$a\cdot b$ $\qquad a, b \neq 0$



$a\cdot b = z\cdot 1$

$\frac{a}{z} = \frac{1}{b}$ {ή οποιαδήποτε άλλη αναλογία}

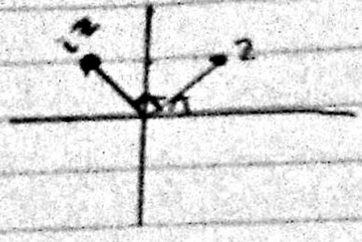
▷ Σε ποια περίπτωση ισχύει αυτή η αναλογία;

Τα τρίγωνα πρέπει να είναι όμοια.

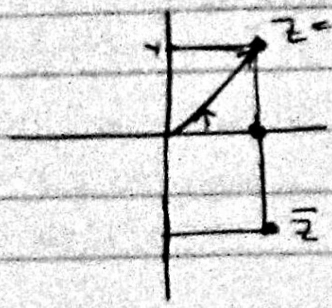
$z=|z|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$

$w=i$ $\qquad Arg(i)=\pi/2$

$iz=|z|\left(\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu(\theta+\pi/2)\right)$



• Εάν είχα $w=-i$ θα πήγαινα από κάτω γιατί θα είχα $-\pi/2$



• $Re(z)=Re(\bar{z})$

$Im(z)=Im(\bar{z})$

1) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

2) $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

3) $w\neq 0 \quad \frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2}$ $=z\cdot w^{-1}$

πραγματικός αριθμός

$z=x+iy$ $\qquad z+\bar{z}=2x$

$\bar{z}=x-iy$ $\qquad \Rightarrow x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad (1)$

* μας λέει πως το $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbb{C}$

$z-\bar{z}=2iy \Rightarrow y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ $\quad (2)$

κύκλος

$\mathbb{R}^2$: $\quad x^2+y^2+2x=0$

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)=0$$

$$\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}-\frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}+z+\bar{z}=0$$

$z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}=0$ $\quad$ {ο κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο}

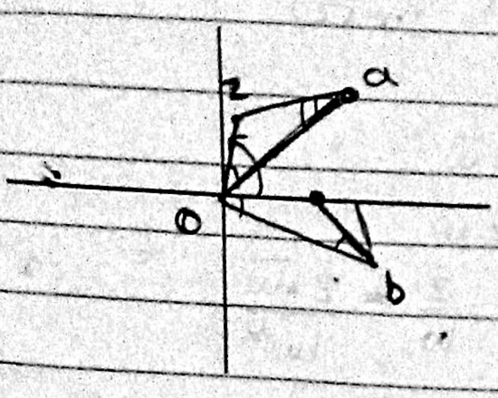
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\bar{z} = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

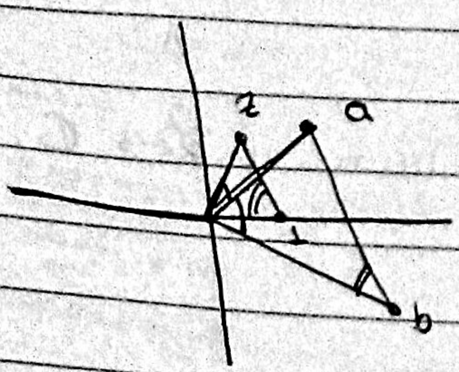
$$\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2}\cdot|z|\,|\bar{w}|\,(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi))$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \varphi = \arg(z) - \arg(w)$$



$$\frac{a}{b} = z = \frac{z}{1}$$



$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \bar{z}/\bar{w}$$

$$\overline{R(a,b,c,\ldots,z)} = R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\ldots\bar{z})$$

$$R(z) = z^5 + 3z^4 + 2z^3 + z + 1$$

$$R(z_0) = 0 \Rightarrow \overline{R(\bar{z}_0)} = 0$$

$$R(\bar{z}_0) = 0$$

$$\overline{R(z)} = \bar{z}^5 + 3\bar{z}^4 + 2\bar{z}^3 + \bar{z} + 1$$

→ Καθε πολυωνυμική περιττου βαθμου εχει τουλαχιστον μια πραγματική λυση

$z \cdot w = |z||w| (\sigma\upsilon\nu(\theta+\varphi) + i\eta\mu(\theta+\varphi))$

$z^2 = |z|^2 (\sigma\upsilon\nu(2\theta) + i\eta\mu(2\theta))$

$z^\nu = |z|^\nu (\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta))$

$|z^\nu| = |z|^\nu$

$\arg(z^\nu) = \nu \arg(\theta)$

→ $|z| = 1$

$z^\nu = \boxed{\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta) = (\sigma\upsilon\nu(\theta) + i\eta\mu(\theta))^\nu}$ | De Moivre

$$i(\eta\mu(\theta) + \eta\mu(2\theta) + \dots + \eta\mu(\nu\theta)) + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu(2\theta) + \dots + \sigma\upsilon\nu(\nu\theta)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\nu} (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\mu \quad \Leftarrow \text{Εφαρμογη}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu(\theta) + i\eta\mu\theta)^{\nu+1} - (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu(\theta) - 1}$$

Παραδειγμα

a) $1 + i + i^2 + \dots + i^{100} = \dfrac{i^{101} - 1}{i - 1}$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

γ) $1 + w + w^2 + \dots + w^\nu = \dfrac{w^{\nu+1} - 1}{w - 1}$

$w \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{N} : z \in \mathbb{C} : z^\nu = w$

$w = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$

$z = r(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$, $z^\nu = r^\nu(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)^\nu = r(\text{συν}(\nu\varphi) + i\,\text{ημ}(\nu\varphi))$

$z^\nu = w :\ r^\nu(\text{συν}(\nu\varphi) + i\,\text{ημ}(\nu\varphi)) = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$

$\Rightarrow\ r^\nu = \rho \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[\nu]{\rho}}$

$\text{συν}(\nu\varphi) = \text{συν}\theta \Rightarrow \nu\varphi = \theta + 2\kappa\pi$ ή $\nu\varphi = \cancel{-\theta}$

$\text{ημ}(\nu\varphi) = \text{ημ}\theta \Rightarrow \nu\varphi = \theta + 2\kappa\pi$ ή $\nu\varphi = \pi - \cancel{\theta}$

$\varphi = \dfrac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu}$

$\kappa = 0 \quad \varphi = \dfrac{\theta}{\nu}$

$\kappa = 1 \quad \varphi = \dfrac{\theta + 2\pi}{\nu}$

$\vdots\ \kappa = \nu - 1 \quad \varphi = \theta + 2(\nu-1)\pi/\nu$

$\kappa = \nu \quad \varphi = \dfrac{\theta + 2\nu\pi}{\nu} = \dfrac{\theta}{\nu} + 2\pi$